E. M. S. I. P 1975

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

PROBLÈME

N. B. — 1° *Il est conseillé aux candidats de traiter les questions* 1°, 2° *et* 3° *de la partie* I *avant d'aborder l'étude des parties* II, III *et* IV. *Par contre, les questions* 4°, 5°, 6°, 7°, 8° *de la partie* I *sont sans incidence sur les trois dernières parties.*

2° *La partie* IV *peut être traitée avant la partie* III, *bien que cette façon de procéder ne soit pas conseillée aux candidats, la partie* IV *pouvant être considérée comme plus difficile que la partie* III.

I

Dans cette première partie, le corps de base est celui des nombres réels; les fonctions f dont il est question sont des fonctions à valeurs réelles, *définies pour tout x réel.*

● Les suites de nombres réels $\{ a_n \}$ envisagées dans la première partie sont définies par la donnée de a_0 réel et d'une relation de récurrence de la forme

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

Avec la condition imposée à f, a_n est donc toujours défini, quel que soit l'entier positif ou nul n.

● On rappelle qu'une suite de nombres réels est convergente si, et seulement si elle admet une limite *finie* l (les limites dont il est question dans la première partie sont toujours supposées *finies*).

1° On suppose dans cette question f continue.

a. Montrer que si la suite $\{ a_n \}$ admet la limite l, celle-ci est nécessairement racine de l'équation

$$l = f(l)$$

b. Montrer que l'existence d'une racine au moins de l'équation précédente n'est pas une condition suffisante de l'existence d'une limite pour la suite $\{ a_n \}$. On pourra étudier l'exemple où

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

et choisir convenablement a_0.

2° Dans cette question, on suppose que f est *contractante*. On dit que f est contractante si, et seulement si, quels que soient les nombres réels distincts x_1 et x_2, on a

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqslant k ,$$

où k est un nombre fixe, indépendant de x_1 et x_2, tel que $0 \leqslant k < 1$ (on notera bien que $k < 1$ *strictement*).

a. Montrer qu'une fonction contractante est continue, et qu'elle est uniformément continue sur $]-\infty, +\infty[$.

b. Montrer que l'équation :

$$x = f(x)$$

ne peut admettre plus d'une racine.

c. Montrer que, a_0 étant quelconque, la suite $\{ a_n \}$ définie par la donnée de a_0 et la relation

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

est convergente. On pourra, pour traiter cette question, poser

$$u_n = a_{n+1} - a_n ,$$

et étudier la série de terme général u_n. En déduire que l'équation $x = f(x)$ admet une racine unique, limite de la suite $\{ a_n \}$, cette limite ne dépendant pas de a_0.

L'ensemble des résultats du 2° constitue le *théorème du point fixe dans* **R**.

3° On recherche dans cette question si la condition :

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqslant k < 1 ,$$

qui a servi de définition aux fonctions contractantes, peut ou non, être remplacée par la condition moins restrictive :

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| < 1$$

pour tout couple de nombres réels distincts (x_1 , x_2).

Étudier l'exemple défini par le choix de f suivant : f est la fonction telle que

$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \geqslant 1 ; \\ f(x) = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 ; \\ f(-x) = f(x) . \end{cases}$$

Que peut-on en conclure?

4° Montrer que si f est dérivable, et à dérivée continue pour tout x, et si sa dérivée f' vérifie pour tout x la condition

$$|f'(x)| \leqslant k < 1 ,$$

f est contractante.

5° On prend dans cette question

$$f(x) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x , \qquad (a_0 \text{ est quelconque}).$$

Les conditions d'application du théorème du point fixe sont-elles satisfaites? La suite $\{ a_n \}$ est-elle convergente?

Déterminer, éventuellement, sa limite. Dépend-elle de a_0?

6° On prend dans cette question

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Arc\,tg} x , \qquad (a_0 \text{ est quelconque}).$$

Les conditions d'application du théorème du point fixe sont-elles satisfaites? Résoudre l'équation $x = f(x)$. Étudier la nature de la suite $\{ a_n \}$. Préciser, le cas échéant, sa limite. Discuter selon les valeurs de a_0.

On pourra s'aider d'une figure sur laquelle on fera apparaître le graphe de f, tracé par rapport à un repère orthonormé, ainsi que la première bissectrice des axes de coordonnées. Il est toutefois rappelé qu'une figure — si bien faite soit-elle — ne constitue pas en elle-même une démonstration.

7° On prend dans cette question

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} , \qquad (a_0 \text{ est quelconque}).$$

Représenter graphiquement f par rapport à un repère orthonormé. Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $x = f(x)$. Les conditions d'application du théorème du point fixe sont-elles satisfaites?

Quelle différence essentielle voyez-vous entre les suites $\{ a_n \}$ définies à l'aide de la fonction du 6°, et celles définies à l'aide de la fonction du 7° ?

Pour étudier complètement les suites définies à partir de

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} , \quad \text{on pose} \quad g(x) = f[f(x)] .$$

Former l'expression de $g(x)$. Étudier et représenter graphiquement g. On précisera le sens de la concavité du graphe de g.

En observant que

$$\begin{cases} a_{2p+2} = f(a_{2p+1}) = f[f(a_{2p})] = g(a_{2p}) \\ a_{2p+1} = f(a_{2p}) = f[f(a_{2p-1})] = g(a_{2p-1}) , \end{cases}$$

étudier séparément les suites de termes généraux a_{2p} et a_{2p+1}.

Conclure en ce qui concerne la nature de la suite $\{ a_n \}$.

Le résultat dépend-il de a_0?

8° On prend dans cette question

$$f(x) = e^{1-x} , \qquad (a_0 \text{ est quelconque}).$$

Étudier la suite $\{ a_n \}$ en s'inspirant de très près de ce qui a été fait au 7°.

II

On considère, dans cette partie, un espace métrique E. Si x, y sont deux éléments de E, leur distance est notée $d(x, y)$. On rappelle que :

— une suite $\{ x_n \}$ d'éléments de E est dite « de Cauchy » si, et seulement si, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un entier positif $N(\varepsilon)$ tel que, pour tous p et q entiers,

$$(p > N(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q \geqslant 0)$$

entraîne $(d(x_p , x_{p+q}) < \varepsilon)$;

— une suite $\{ x_n \}$ d'éléments de E est dite *convergente* s'il existe un élément l de E tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n , l) = 0 ;$$

— un espace métrique E est dit *complet* si, et seulement si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

● Soit f une application de E dans lui-même. On définit une suite $\{ a_n \}$ d'éléments de E par la donnée de a_0 et d'une relation de récurrence de la forme

$$a_{n+1} = f(a_n) .$$

1° On suppose dans cette question f *continue*. Montrer que, si la suite $\{ a_n \}$ admet la limite l, celle-ci vérifie nécessairement l'équation

$$l = f(l) .$$

2° On suppose dans cette question que E est *complet* et que f est *contractante*. On dit que f est contractante si, et seulement si, quels que soient les éléments x_1, x_2 distincts de E, on a

$$\frac{d[f(x_1) , f(x_2)]}{d(x_1 , x_2)} \leqslant k ,$$

où k est un nombre réel fixe, indépendant de x_1 et x_2, tel que $0 \leqslant k < 1$ (on notera bien que $k < 1$ strictement).

a. Montrer qu'une application contractante est continue, et qu'elle est uniformément continue sur E tout entier.

b. Montrer que l'équation $x = f(x)$ ne peut admettre plus d'une racine dans E.

c. Montrer que, a_0 étant un élément quelconque de E, la suite $\{ a_n \}$ de E définie par la donnée de a_0 et la relation

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

est une suite de Cauchy.

En déduire que cette suite est convergente et que l'équation $x = f(x)$ admet une racine unique, limite de la suite $\{ a_n \}$, cette limite ne dépendant pas de a_0. L'ensemble des résultats du 2° constitue le *théorème du point fixe* dans un espace métrique complet.

III

Dans cette partie, p est un entier donné tel que $p \geqslant 2$. E est l'espace affine euclidien $\mathbf{R}^p$ rapporté à un repère orthonormé, ce qui signifie que si M et M′ sont deux éléments de E, de coordonnées respectives

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p' \end{bmatrix}$$

la distance de M et M′ est définie par la relation

$$d(\mathrm{M} , \mathrm{M}') = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} (x_k - x_k')^2}$$

On définit une application g de $\mathbf{R}^p$ dans lui-même, de la façon suivante : m et M étant deux éléments de $\mathbf{R}^p$, la relation $M = g(m)$ équivaut à

$$X_k = f(x_k) \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, p ,$$

où f est la fonction définie au I-3°, les coordonnées de m et M étant notées respectivement

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_p \end{bmatrix}$$

On se donne un élément quelconque A_0 de $\mathbf{R}^p$, et on définit une suite $\{ A_n \}$ de $\mathbf{R}^p$ par la donnée de A_0 et la relation de récurrence

$$A_{n+1} = g(A_n)$$

On aura soin de noter les coordonnées de A_n

$$\begin{pmatrix} a_{n,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n,p} \end{pmatrix}$$

en respectant l'ordre des indices.

1° L'application g vérifie-t-elle, pour tout couple d'éléments m, m' distincts de $\mathbf{R}^p$, l'inégalité

$$\frac{d[g(m), g(m')]}{d(m, m')} < 1 \quad ?$$

2° La suite $\{ A_n \}$ est-elle convergente?

IV

On se propose ici de mettre en évidence le rôle essentiel joué dans la partie II-2° par l'hypothèse « E est complet ». On prend ici pour ensemble E le corps Q des rationnels, muni de la distance euclidienne, ce qui signifie que, si x, x' sont deux éléments de Q, leur distance est définie par la relation

$$d(x, x') = |x - x'|$$

On rappelle que Q *n'est pas complet.*

f étant une application de Q dans Q, on se donne un élément a_0 de Q, et on définit une suite de Q par la donnée de a_0 et la relation de récurrence

$$a_{n+1} = f(a_n) .$$

La définition d'une application contractante est, d'autre part, celle donnée en II.2°.

1° On pose ici

$$f(x) = \frac{x}{2} .$$

Montrer que f est contractante et que, quel que soit a_0, la suite $\{ a_n \}$ est convergente dans Q. Quelle est sa limite?

2° On pose ici :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

a. f est-elle contractante?

b. La suite $\{ a_n \}$ est-elle convergente dans Q?

3° Quels commentaires vous inspirent les exemples précédents?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail